

Tentamen Calculus 1

7 november 2011, 14.00-17.00 uur.

Dit tentamen bestaat uit negen opgaven waarvoor in het totaal negen punten te behalen zijn. De detailnormering staat onderaan het tentamen. Totaal: $9 + 1$ (gratis) = 10. Schrijf op elk in te leveren blad je naam en studentnummer, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Het gebruik van aantekeningen, boeken, en grafische rekenmachine is niet toegestaan. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes.

- (a) Formuleer het principe van volledige inductie.
(b) Bewijs dat

$$n^3 + 2n$$

deelbaar is door 3, voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$.

- Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan

$$(z + 1)^3 = -2 - 2i$$

en schets de ligging van deze getallen in het complexe vlak.

- (a) Een functie $f(x)$ is gedefinieerd op een open omgeving van a (en mogelijk niet in a zelf). Geef de ϵ - δ -definitie van

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

- (b) Bewijs m.b.v. deze definitie dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

- We nemen aan dat f een differentieerbare functie is met $f(x) \neq 0$. Vul de ontbrekende stappen in:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \dots = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

- Bepaal de afgeleide van

$$e^{(2x-1)^2} + \int_{2x-1}^{x^2+1} e^{t^2} dt$$

6. De aarde oefent een gravitatiekracht F uit op een eenheidsmassa op afstand r van het middelpunt van de aarde. Deze kracht wordt gegeven door

$$F(r) = \begin{cases} GMr/R^3 & \text{als } r < R \\ GM/r^2 & \text{als } r \geq R \end{cases}$$

waarbij R de straal van de aarde is, M de massa van de aarde, en G de gravitatieconstante. (NB: R , M en G zijn constant).

- (a) Is de functie $F(r)$ continu?
 (b) Is F differentieerbaar in $r = R$?

7. De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^x$ waarbij $x > 0$.

- (a) Laat zien dat

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

- (b) Bepaal $f'(x)$ voor $x > 0$.

- (c) Bereken

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x}$$

8. (a) Bepaal

$$\int \frac{\cos \sqrt{2x}}{\sqrt{x}} dx$$

- (b) Idem

$$\int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx$$

9. Bepaal voor $x > 0$ een functie $y(x)$ die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$x^2 y' + xy = 1$$

en $y(1) = 2$.

Detailnormering:

1a	0.5	2	1.0	3a	0.5	4	1.0	5	1.0	6a	0.5	7a	0.4	8a	0.5	9	1.0
b	0.5			b	0.5					b	0.5	b	0.3	b	0.5		
												c	0.3				